LIBRIS | MINISTERUL EDUCAŢIEI

Dorin Lințe
Maria Zaharia

Maranda Lințe
Dan Zaharia

MATEMATICĂ



Manual pentru
clasa a VI-a

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ S.A.

LIBRIS | We know books

CUPRINS

1. MULȚIMI

1.1. Descriere. Notații. Reprezentări. Relația dintre un element și o mulțime 8
1.2. Relații între mulțimi 11
1.3. Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale 14
1.4. Operații cu mulțimi 16
1.5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime 19
1.6. Determinarea celui mai mare divizor comun și a celui mai mic multiplu comun 22
1.7. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale 26

2. RAPOARTE ȘI PROPORȚII

2.1. Rapoarte 32
2.2. Proporții 37
2.3. Șir de rapoarte egale. Mărimi proporționale 41
2.4. Regula de trei simplă 47
2.5. Elemente de organizare a datelor 50
2.6. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice 53
2.7. Probabilități 55
2.8. Raportul și proporția în viața cotidiană 57

3. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

3.1. Mulțimea numerelor întregi.
Opusul unui număr întreg. Reprezentare, comparare și ordonare 62
3.2. Adunarea și scăderea numerelor întregi. Proprietăți 68
3.3. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți 74
3.4. Împărțirea numerelor întregi, când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului 78
3.5. Puterea cu exponent natural a unui număr întreg nenul. Reguli de calcul cu puteri 81
3.6. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor 85
3.7. Ecuații în mulțimea numerelor întregi 87
3.8. Inecuații în mulțimea numerelor întregi 90
3.9. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor 93

4. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

4.1. Noțiuni recapitulative 98
4.2. Număr rațional. Mulțimea numerelor raționale. Forme de scriere a numerelor raționale 100
4.3. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor.
Opusul și modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale 104

LIBRIS We know books

4.4. Adunarea și scăderea numerelor raționale. Proprietăți 108
4.5. Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale. Proprietăți 115
4.6. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri 121
4.7. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor 125
4.8. Ecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor 127

5. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

5.1. Recapitulare și completări 136
5.2. Unghiuri opuse la vârf. Congruența lor 140
5.3. Unghiuri în jurul unui punct. Suma măsurilor lor 143
5.4. Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare. Unghiuri adiacente. 148
5.5. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi 151
5.6. Drepte paralele 154
5.7. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă 158
5.8. Axioma paralelelor 160
5.9. Criterii de paralelism 165
5.10. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice 170
5.11. Drepte perpendiculare în plan. Oblice 172
5.12. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice 176
5.13. Distanța de la un punct la o dreaptă 178
5.14. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă 181
5.15. Cerc. Definiție. Construcție. Elemente în cerc 187
5.16. Unghi la centru. Măsuri 192
5.17. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri 195

6 TRIUNGHIUL

6.1. Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetru 204
6.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi 209
6.3 Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului 213
6.4. Linii importante într-un triunghi. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi 216
6.5. Linii importante în triunghi. Mediatoarele laturilor unui triunghi 220
6.6. Linii importante în triunghi. Înălțimile unui triunghi 223
6.7. Linii importante în triunghi. Medianele unui triunghi 226
6.8. Congruența triunghiurilor. Criterii de congruență 230
6.9. Congruența triunghiurilor dreptunghice. Criterii de congruență 235
6.10. Metoda triunghiurilor congruente 239
6.11. Proprietățile triunghiului isoscel. Proprietățile triunghiului echilateral 243
6.12. Proprietățile triunghiurilor dreptunghice 248

LIBRIS We know books



Gheorghe Ţiţeica (1873-1930) este primul matematician român care a fost recunoscut în lumea academică mondială, prin valoroase lucrări ştiinţifice.

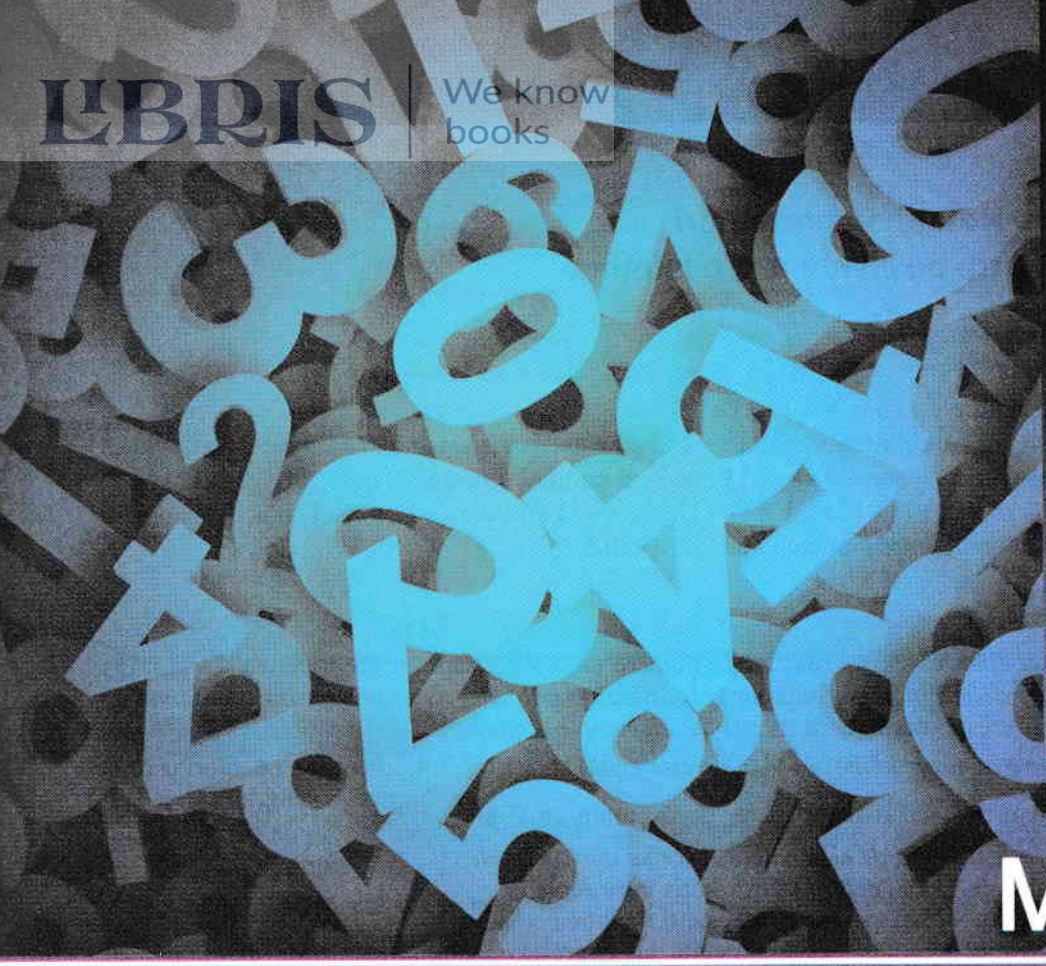
A fost unul dintre cei mai mari geometri ai lumii și la diverse congrese de matematică a fost ales președintele secției de geometrie.

A fost invitat să ţină cursuri la universităţile din Roma, Bruxelles şi Paris, cursurile lui fiind de o desăvârşită artă a pedagogiei.

Competențe generale

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, a concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situaţie dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situaţii date
6. Modelarea matematică a unei situaţii date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

LIBRIS | We know books



1 Mulțimi

1. Descriere. Notații. Reprezentări. Relaţia dintre un element și o mulțime
2. Relații între mulțimi
3. Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale
4. Operaţii cu mulţimi
5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime
6. Determinarea celui mai mare divizor comun şi a celui mai mic multiplu comun

LIBRIS We know books

1.1. Descriere. Notații. Reprezentări. Relația dintre un element și o mulțime

Rezolvăm și descoperim

1. Determinați numerele naturale x știind că $x+11\leq 15$.

Rezolvare. Dacă x este un număr natural, atunci $x+11$ este de asemenea număr natural. Observând că $x+11\geq 11$ și ținând cont de enunț, rezultă că $x+11$ este egal cu unul dintre numerele: 11, 12, 13, 14 sau 15. Prin urmare $x+11=11$ sau $x+11=12$ sau $x+11=13$ sau $x+11=14$ sau $x+11=15$. Din aceste egalități deducem că x este egal cu unul dintre numerele: 0, 1, 2, 3 sau 4.

Descoperim

Rezolvarea problemei arătă că există mai multe numere naturale x care au proprietatea $x+11\leq 15$. Ele sunt *distincte* și *bine determinate* și, împreună, formează o *colecție*, o *grămadă* sau o *mulțime* de numere. Fiecare dintre aceste numere se numește *element al mulțimii*. Vom spune că *mulțimea numerelor naturale x care au proprietate* $x+11\leq 15$ *este egală cu* $\{0,1,2,3,4\}$. Pentru a ne referi ușor la această mulțime, o putem nota cu o literă mare, de exemplu cu A și vom scrie $A=\{0,1,2,3,4\}$. Se observă că mulțimea A, *este definită de elementele ei scrise între acolade.*

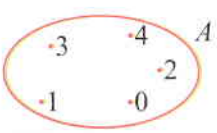
Este 3 element al mulțimii A? Da, pentru că este scris între acolade.

Este 7 element al mulțimii A? Nu, pentru că nu este scris între acolade.

Expresia „*este element al mulțimii*" este înlocuită cu expresia sinonimă „*aparține mulțimii*", iar expresia „*nu este element al mulțimii*" este înlocuită cu expresia sinonimă „*nu aparține mulțimii*". Pentru „*aparține*" se folosește simbolul $\in$, iar pentru „*nu aparține*" se folosește simbolul $\notin$. Astfel, se scrie $3\in A$ și se citește „3 aparține mulțimii A"; se scrie $5\notin A$ și se citește „5 nu aparține mulțimii A".

Putem defini mulțimea A enunțând *proprietatea caracteristică elementelor mulțimii* (pe care o are oricare element al mulțimii și nu o are niciun alt element care nu este din mulțime): $A=\{x\,|\,x$ este număr natural și $x+11\leq 15\}$. În acest caz: $3\in A$ pentru că 3 are *proprietatea caracteristică elementelor mulțimii*, adică *3 este număr natural și* $3+11\leq 15$. $5\notin A$ pentru că 5 nu are *proprietatea caracteristică elementelor mulțimii* deoarece 5 este număr natural, dar $5+11\geq 15$. Prin urmare: $A=\{0,1,2,3,4\}$ sau $A=\{x\,|\,x$ este număr natural și $x+11\leq 15\}$.

Mulțimea A poate fi ilustrată desenând o linie curbă închisă și scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare (*diagramă Venn-Euler*). Cele trei forme de definire a mulțimii A se numesc: *explicită*, *implicită*, cu *ajutorul diagramei Venn-Euler*.



Istorie Folosirea figurilor pentru reprezentarea mulțimilor este foarte veche. Matematicianul Leonard Euler (1707 – 1783) s-a folosit de figuri rotunde pentru a explica anumite reguli ale logicii. Logicianul John Venn (1834 – 1923), profesor la Cambridge, a adus diagramelor lui Euler îmbunătățiri utile. Pentru aceasta, diagramele reprezentând mulțimi le numim diagrame *Venn-Euler*.



Rezumăm cunoștințele

***Mulțimea** este o colecție de obiecte bine determinate și distincte numite **elementele mulțimii**.*
Mulțimile se notează cu litere mari, iar elementele mulțimilor se notează cu litere mici.

LIBRIS | We know books

Dacă A este o mulțime și x un element al său, atunci vom scrie $x \in A$ și vom citi „x aparține lui A”.
Dacă x nu este un element al mulțimii A, atunci vom scrie $x \notin A$ și vom citi „x nu aparține lui A”.

O mulțime poate fi dată în trei moduri:

*1) **explicit**, numind fiecare element al mulțimii; mulțimea se scrie punând între acolade elementele sale.*

*2) **cu ajutorul diagramei Venn-Euler**; mulțimea poate fi ilustrată desenând o curbă închisă și scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare.*

*3) **implicit**, enunțând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii (pe care o are oricare element al mulțimii și nu o are niciun alt element care nu aparține mulțimii).*

***O mulțime numerică** este o mulțime ale cărei elemente sunt numere.*

***O mulțime nenumerică** este o mulțime care nu este mulțime numerică.*

*Mulțimea care nu are niciun element se notează cu simbolul $\emptyset$ și se numește **mulțimea vidă**.*

Aplicăm cunoștințele

1. Fie M mulțimea cifrelor pare.

a) Completați propoziția care urmează: „*Cifrele pare sunt*: ... .”

b) Scrieți mulțimea M:

- numind fiecare element al mulțimii;
- cu ajutorul diagramei Venn-Euler.

c) Dacă $x \in M$, ce proprietate are x?

d) Scrieți mulțimea M enunțând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii.

e) Copiați și înlocuți caseta alăturată cu (A) dacă afirmația este adevărată și cu (F) dacă afirmația este falsă:

$2 \in M$ ■ $1 \notin M$ ■ $4 \notin M$ ■ $7 \in M$ ■

2. La o oră de geografie profesorul explică: „*Vârful Moldoveanu este vârful muntos cel mai înalt din România, situat în Masivul Făgăraș, județul Argeș. Altitudinea sa este de două mii cinci sute și ceva metri*”. Mihai, un elev foarte bun la matematică, notează pe caietul său: „*altitudine Vârful Moldoveanu:* $\overline{25xy}$ m”. În pauză, Mihai află de la Alexandra, care este foarte bună la geografie, că altitudinea Vârfului Moldoveanu este de 2 544 m.

a) Scrieți mulțimea A ale cărei elemente sunt simbolurile numerice și literale folosite de Mihai pentru a scrie altitudinea Vârfului Moldoveanu.

b) Scrieți mulțimea B ale cărei elemente sunt cifrele folosite pentru a scrie numărul 2 544.

c) Una dintre mulțimile A și B este numerică, iar cealaltă este nenumerică. Precizați care este mulțimea numerică și care este mulțimea nenumerică.

3. O echipă de 15 copii este formată din fete și băieți. Știind că x este număr natural și $\frac{1}{x}$ din numărul de copii ai echipei sunt fete, iar echipa are cel puțin o fată și cel puțin un băiat:

a) aflați numărul fetelor din echipă;

b) scrieți explicit mulțimea $M = \left\{ \frac{1}{x} \middle| \, x \text{ este numărul fetelor din echipă} \right\}$.

4. Se consideră mulțimea $A = \{x \mid x \text{ număr natural impar și } 5 < x < 7\}$.

a) Câte elemente are mulțimea?

b) Mulțimea este denumită cu litera A. Folosiți în locul literei A simbolul potrivit și redenumiți mulțimea.

LIBRIS We know books

Ne verificăm

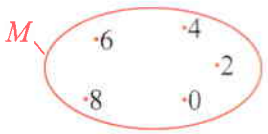
1. a) Cifrele pare sunt: 0, 2, 4, 6, 8. b) $M=\{0,2,4,6,8\}$.

c) Dacă $x\in M$ atunci x are proprietatea x este cifră pară.

d) $M=\{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$.

e) $2\in M$ (A); $1\notin M$ (A); $4\notin M$ (F); $7\in M$ (F).

Diagrama Venn-Euler a lui M



2. a) $A=\{2,5,x,y\}$; b) $A=\{2,4,5\}$; c) Mulțimea A este *mulțime nenumerică* (elementele ei sunt simboluri numerice și literale), iar mulțimea B este *mulțime numerică* (elementele ei sunt numere).

3. a) Cum $\frac{1}{x}$ din 15 este egal cu $\frac{15}{x}$, rezultă că numărul fetelor este $\frac{15}{x}$. Prin urmare 15 se împarte exact la numărul natural nenul x. Altfel spus, 15 este divizibil cu x, deci x este egal cu unul dintre numerele 1, 3, 5 sau 15. Rezultă că numărul fetelor poate fi egal cu: $\frac{15}{1}$ sau $\frac{15}{3}$ sau $\frac{15}{5}$ sau $\frac{15}{15}$, adică 5, sau 3, sau 1. b) $M=\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right\}$.

4. a) Nu există niciun număr natural impar între 5 și 7, deci A este mulțimea vidă.

b) Se scrie $A=\{x \mid x \text{ număr natural impar și } 5<x<7\}=\emptyset$.

Activități de învățare

1. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea literelor din care sunt formate cuvintele:

a) număr; b) elev; c) profesor; d) vacanță.

Comparați numărul elementelor mulțimii cu numărul literelor scrise, pentru fiecare dintre cuvintele date.

2. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele:

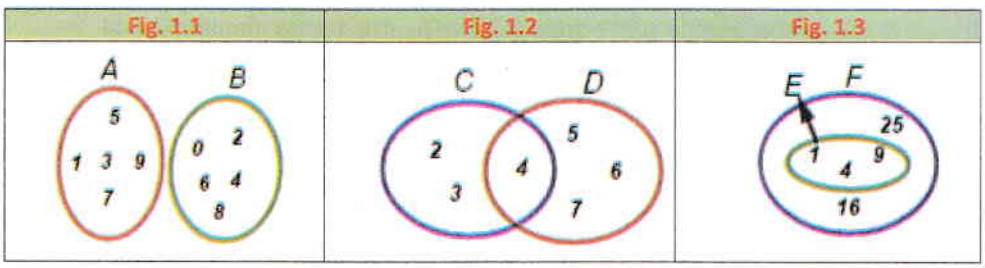
a) 2 018; b) 123 231; c) 17 382 731; d) 101 001 000.

Comparați numărul elementelor mulțimii cu numărul cifrelor scrise, pentru fiecare dintre numerele date.

3. Scrieți, cu ajutorul proprietății caracteristice a elementelor, următoarele mulțimi:

$M=\{0,1,2,3,4,5,6\}$; $P=\{0,2,4,6,8\}$; $S=\{1,2,4,8,16\}$; $T=\{10,20,30,\ldots,90\}$.

4. Prin diagramele din *figura 1*, sunt reprezentate perechile de mulțimi $(A, B),(C, D),(E, F)$.



a) Scrieți mulțimile date, pentru fiecare caz, prin enumerarea elementelor.

b) Scrieți mulțimile date, precizând proprietatea caracteristică a elementelor.

5. Se consideră mulțimea A, a tuturor râurilor care izvorăsc în România și mulțimea B, a formelor de relief existente în România.

a) Scrieți trei elemente ale mulțimii A; b) Scrieți patru elemente ale mulțimii B.

6. **Scrieți mulțimea tuturor numerelor de cel mult trei cifre, care se pot forma doar cu cifrele 0 și 1.**

LIBRIS | We know books

7. Scrieți mulțimea numerelor naturale mai mici decât 4:
   a) prin enumerarea elementelor;
   b) cu ajutorul proprietății caracteristice a elementelor mulțimii;
   c) prin diagrama Venn-Euler.

8. Se consideră mulțimile $A=\{1,3,5,8\}$ și $B=\{2,3,5,6,9\}$. Copiați și înlocuiți căsuța alăturată enunțului cu (A), dacă enunțul este adevărat sau cu (F), dacă enunțul este fals.

a) $4\in A$; ☐	b) $5\in A$; ☐	c) $7\notin A$; ☐
d) $2\in B$; ☐	e) $3^2\in B$; ☐	f) $2^3\notin B$; ☐
g) $3\in A$ și $3\in B$; ☐	h) $1\in A$ sau $1\in B$; ☐	i) $4\in A$ sau $4\in B$; ☐
j) $1\in A$ sau $0\in\varnothing$ ☐	k) $1\in A$ și $0\notin\varnothing$ ☐	l) $9\in B$ și $9\notin A$. ☐

1.1. Relații între mulțimi

Aplicăm cunoștințele

1. Despre două mulțimi M și N se spune că sunt *mulțimi egale* dacă au aceleași elemente. Notăm $M=N$. Dacă mulțimile M și N nu sunt egale notăm $M\neq N$.
   a) Scrieți mulțimile de mai jos și precizați mulțimile egale.
   $A=\{x$ număr natural și $3<x<8\}$, $B=\{4,5,6,7\}$, $C=\{x$ număr par și $x<5\}$,
   $D=\{x$ număr natural și $4\leq x\leq 7\}$, $E=\{x$ cifră și $x\geq 3\}$.
   b) Mihai susține că „$A=B$ și $B=C$”. Sonia susține că „$A=B=D$, $B\neq C$ și $C=D$”. Cine are dreptate?
   c) Corectați afirmațiile celor doi colegi, astfel încât, fiecare afirmație să fie adevărată.

2. Despre o mulțime A se spune că este *inclusă* într-o mulțime B dacă *toate elementele mulțimii A sunt și elemente ale mulțimii B*. Se mai spune că A este o *parte* a lui B. Notăm $A\subset B$ (citim „A este *inclus* în B”) sau notăm $B\supset A$ (citim „B *include* A”).
   Ana, Mihai și Sonia se joacă. Fiecare scrie pe tablă câte o mulțime:
   $A=\{x$ număr natural și $3\cdot x\leq 10\}$, $M=\{x$ număr natural, $x\neq 0$ și $x+3<7\}$,
   $S=\{1,2,3\}$.
   a) Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:
   $a_1)$ $M=A$; $a_2)$ $M\subset A$; $a_3)$ $A\subset M$; $a_4)$ $S\subset A$; $a_5)$ $A\subset S$.
   b) Corectați relațiile de mai sus, scrise între două mulțimi, astfel încât, toate să fie adevărate.

Rezumăm cunoștințele

Două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elemente. Dacă A și B sunt două mulțimi egale, notăm $A=B$, iar dacă nu sunt egale notăm $A\neq B$.

O mulțime este inclusă într-o altă mulțime, dacă elementele primei mulțimi sunt și elemente ale celei de-a doua mulțimi.

Mulțimea A este inclusă în mulțimea B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B.

Dacă *mulțimea A este inclusă în mulțimea B*, scriem $A\subset B$. Se mai spune că B include pe A și scriem $B\supset A$. În acest caz se spune despre A că este o submulțime a lui B, sau că A este o parte a lui B.

Dacă *mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B*, adică A nu este o submulțime a lui B, notăm $A\not\subset B$ (citim „A nu este inclus în B”), sau $B\not\supset A$, (citim „B nu include pe A”).

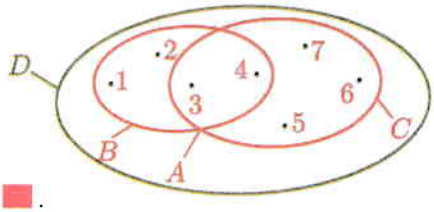
Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi A și notăm: $\varnothing\subset A$

Orice mulțime este inclusă în ea însăși: $A\subset A$, oricare ar fi mulțimea A.

Două mulțimi sunt egale dacă și numai dacă fiecare din ele este o submulțime a celeilalte mulțimi:
$A=B\Leftrightarrow A\subset B$ și $B\subset A$

LIBRIS We know books

Aplicăm cunoștințele



3. Se consideră mulțimile: $A = \{3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ și $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

a) Copiați și înlocuiți căsuța alăturată enunțului cu (A), dacă enunțul este adevărat, sau cu (F), dacă enunțul este fals

$B \subset C$ ■; $C \subset B$ ■; $B \subset D$ ■; $A \subset D$ ■.

b) Una dintre mulțimile date **le conține pe celelalte** trei. Numiți mulțimea respectivă și scrieți relația dintre aceasta și celelalte trei.

c) Una dintre mulțimi este conținută de celelalte trei. Numiți mulțimea respectivă și scrieți relația dintre aceasta și celelalte trei.

4. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3\}$

a) Mulțimea M are o submulțime care nu are nici un element. Care este aceasta?

b) Mulțimea M are o submulțime care are trei elemente. Care este aceasta?

c) Scrieți toate submulțimile lui M care au: • un singur element; • două elemente;

d) Scrieți mulțimea ale cărei elemente sunt toate submulțimile (părțile) lui M.

Ne verificăm

1. a) $A = \{4, 5, 6, 7\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C = \{0, 2, 4\}$; $D = \{4, 5, 6, 7\}$; $E = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, deci: $A = B = D$.

b) Afirmația lui Mihai „$A = B$ și $B = C$" este falsă deoarece $B \neq C$. Afirmația Soniei „$A = B = D$, $B \neq C$ și $C = D$" nu este adevărată deoarece $C \neq D$. Nici Mihai și nici Sonia nu au dreptate.

c) Afirmațiile corecte sunt: „$A = B$ și $B \neq C$"; „$A = B = D$, $B \neq C$ și $C \neq D$".

2. a) Pentru a stabili care dintre afirmații sunt adevărate scriem mulțimile numind elementele fiecăreia. Prin urmare: $A = \{0, 1, 2, 3\}$; $M = \{1, 2, 3\}$; $S = \{1, 2, 3\}$. Rezultă: a_1) $M = A$ (F); a_2) $M \subset A$ (A); a_3) $A \subset M$ (F); a_4) $S \subset A$ (A); a_5) $A \subset S$ (F).

b) Relații corecte: b_1) $M \neq A$ (A); b_2) $M \subset A$ (A); b_3) $A \not\subset M$ (A); b_4) $S \subset A$ (A); b_5) $A \not\subset S$ (A).

3. a) $B \subset C$ (F); $C \subset B$ (F); $B \subset D$ (A); $A \subset D$ (A).

b) Mulțimea care le conține pe celelalte trei mulțimi este D: $A \subset D$; $B \subset D$ și $C \subset D$.

c) Mulțimea care este conținută de celelalte trei mulțimi este A: $A \subset B$; $A \subset C$ și $A \subset D$.

4. a) Submulțimea lui M care nu are nici un element este *mulțimea vidă*, adică $\emptyset$;

b) Submulțimea lui M care trei elemente este M, adică $M \subset M$.

c) Submulțimile lui M care au un singur element sunt: $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$. Submulțimile lui M care au două elemente sunt: $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{2, 3\}$.

d) Toate submulțimile lui M sunt: $\emptyset$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{2, 3\}$ și $\{1, 2, 3\}$.

Activități de învățare

1. Scrieți toate submulțimile mulțimilor:

a) $A = \{1, 2\}$; b) $B = \{2, 3, 5\}$; c) $C = \{a, b, c, d\}$.

2. Determinați toate mulțimile M care îndeplinesc simultan condițiile:

a) $\{1, 2\} \subset M$; b) $M \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. Completați spațiile libere cu unul din simbolurile $\subset$, $=$, $\not\subset$ astfel încât afirmațiile să fie adevărate.

a) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B, atunci $A \ldots B$.

b) Dacă există cel puțin un element al mulțimii A care nu este element al mulțimii B, atunci $A \ldots B$.

c) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B și orice element al mulțimii B este element al mulțimii A, atunci $A \ldots B$.

LIBRIS | We know books

4. Scrieți o mulțime M ale cărei elemente să fie 4 numere naturale, apoi scrieți toate submulțimile lui M cu câte 3 elemente.

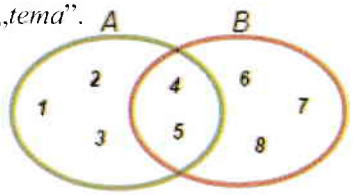
5. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. Scrieți trei submulțimi ale mulțimii M astfel încât fiecare submulțime să aibă 4 elemente.

6. Determinați toate mulțimile M care îndeplinesc simultan condițiile:

a) $\{1,2\} \subset M$; b) $M \subset \{1,2,3,4,5\}$.

7. Scrieți submulțimile cu două elemente ale mulțimii literelor cuvântului „*tema*”.

8. În figura alăturată sunt reprezentate prin diagrame mulțimile A și B.



a) Determinați mulțimea C, a elementele comune mulțimilor A și B.

b) Scrieți submulțimile mulțimii C.

9. Se consideră mulțimea

$M = \{Arad, Brașov, București, Constanța, Craiova, Iași, Timișoara\}$

a) Scrieți submulțimea mulțimii M, care conține nume de orașe din Transilvania.

b) Scrieți submulțimea mulțimii M, care conține nume de orașe din Moldova.

c) Scrieți submulțimea mulțimii M, care conține nume de orașe cu cel puțin 1 000 000 de locuitori.

10. La un magazin s-au înregistrat într-o săptămână, din vânzarea unor mărfuri, sumele de bani înscrise în tabelul următor, în lei:

Marfa / Ziua	dulciuri	flori	jucării	cărți	total
luni	180	60	50	70	...lei
marți	170	30	45	75	...lei
miercuri	160	70	70	85	...lei
joi	170	70	80	70	...lei
vineri	170	60	90	90	...lei
sâmbătă	200	120	100	90	...lei
duminică	160	110	60	70	...lei

a) Efectuați calculele necesare și determinați sumele totale zilnice, obținute din vânzări.

b) Scrieți mulțimea zilelor în care au avut loc vânzări de cel puțin 400 de lei.

c) Scrieți mulțimea zilelor în care suma obținută din vânzarea dulciurilor este cel puțin jumătate din suma obținută în întreaga zi.

11. Copiați și înlocuiți căsuța alăturată enunțului cu (A), dacă enunțul este adevărat, sau cu (F), dacă enunțul este fals.

a) $\{1,2,7\} \subset \{0,1,2,5,7,9\}$; ☐ b) $\{5\} \subset \{1,2,3,4,6,7,8\}$; ☐

c) $\{a,b,c,d\} \supset \{a,d\}$; ☐ d) $\varnothing \subset \{0\}$; ☐

12. Mulțimile $D = \{x;\ 2 \cdot x - 1;\ 3 \cdot x + 1\}$ și $E = \{3,5,10\}$ sunt egale. Aflați numărul x.

13. Se consideră mulțimea $M = \{12,22,32,42,...,92\}$.

a) Scrieți numărul elementelor mulțimii M.

b) Scrieți trei submulțimi ale mulțimii M formate din patru elemente.

c) Scrieți toate submulțimile formate din opt elemente.

14. Determinați elementul x, pentru fiecare din situațiile următoare; analizați toate cazurile posibile.

a) $\{x\} \subset \{1,5\}$;

b) $\{12,x,18\} \subset \{10,12,14,16,18\}$;

c) $\{a,b,x,d\} \subset \{x \mid x$ este literă a cuvântului *abecedar*$\}$.

LIBRIS We know books

15. Determinați numerele x și y pentru fiecare din situațiile:

a) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{x;2\cdot x;\ 2\cdot x+1\}$ și $A=B$;

b) $C=\{y-2;\ y+3;\ 2y+1;\ 3y\}$, $D=\{3,8,11,15\}$ și $C=D$;

16. Aflați cardinalul mulțimii A, respectiv B știind că:

a) mulțimea A are exact 8 submulțimi; b) Mulțimea B are exact 16 submulțimi.

17. Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,...,10\}$.

a) Determinați mulțimile $M\subset A$ astfel încât produsul elementelor mulțimii M să fie cel mult 17.

b) Determinați submulțimile $\{a,b\}$ ale mulțimii A, astfel încât $(a+b)\in A$.

1.3. Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale

Rezolvăm și descoperim

1. Dacă n este un număr natural oarecare, atunci numărul natural $n + 1$ se numește *succesorul* numărului natural n. De exemplu, 6 este succesorul lui 5 deoarece $6 = 5 + 1$.

Mihai scrie pe o foaie de hârtie mulțimea A = {x număr natural și $x < 8$} și îi propune Soniei următorul joc: un jucător scrie cel mai mic număr din mulțimea A, iar al doilea va scrie succesorul numărului scris de primul jucător. Apoi, primul jucător va scrie succesorul numărului scris de cel de-al doilea jucător și așa mai departe. Jocul se termină atunci când unul dintre jucători scrie cel mai mare număr din mulțime. Jucătorul respectiv este declarat câștigător.

Vlad și Mircea joacă și ei același joc, dar în locul mulțimii A, ei consideră mulțimea B = {x număr natural și $x \geq 8$}.

a) Explicați de ce $3 \in A$ și $8 \notin A$.

b) Scrieți toate elementele mulțimii A.

c) Câte elemente are mulțimea A?

d) Explicați de ce $8 \in B$ și $3 \notin B$.

e) Puteți scrie toate elementele mulțimii B?

f) Câte elemente are mulțimea B?

Important

1) mulțimile care au un număr bine precizat de elemente, se numesc *mulțimi finite*.

2) mulțimile cărora nu le putem stabili numărul de elementele, se numesc *mulțimi infinite*.

Exemple:

În jocul lui Mihai cu Sonia mulțimea A are 8 elemente. Spunem despre mulțimea A că are un *număr finit* de elemente și că A este o *mulțime finită*. Vom scrie A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} (între acolade scriem elementele mulțimii). Uneori este util să se folosească o scriere mai scurtă A = {0, 1, 2, ..., 7}, care sugerează că elementele mulțimii A sunt numerele naturale de la 0 până la 7.

În geometrie admitem că o dreaptă d este o mulțime de puncte, dar nu putem număra punctele dreptei d. Deoarece pe dreapta d sunt un număr nesfârșit de puncte, spunem că dreapta d are o *infinitate* de puncte.

În jocul lui Vlad cu Mircea nu putem stabili câte elemente are mulțimea B. Spunem despre mulțimea B că are o *infinitate* de elemente. Vom scrie B = {8, 9, 10, ...} și vom spune că B este o *mulțime infinită*.

Cu șirul numerelor naturale 0, 1, 2, 3, ... putem forma o mulțime infinită de numere, pe care o numim *mulțimea numerelor naturale*. Pentru a ne referi la această mulțime folosim simbolul $\mathbb{N}$ și scriem: $\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, 3, ...}. Dacă din mulțimea numerelor naturale excludem numărul natural 0, obținem o nouă mulțime infinită de numere numită *mulțimea numerelor naturale nenule*, notată cu $\mathbb{N}^*$. Deci $\mathbb{N}^*$ = {1, 2, 3, ... }.

2. a) Scrieți divizorii numărului 12. b) Scrieți multiplii numărului 3 mai mici decât 17.

LIBRIS | We know books

3. Fie n un număr natural oarecare. Prin urmare $n \in \mathbb{N}$. Vom nota cu D_n, mulțimea tuturor divizorilor numărului natural n, iar cu M_n, mulțimea tuturor multiplilor lui n.

a) scrieți explicit mulțimea D_{12};

b) scrieți explicit mulțimea M_3;

c) Care dintre mulțimile D_{12} și M_3 este finită și care este infinită?

d) Dacă $p \in \mathbb{N}^*$ scrieți explicit mulțimea M_p.

Rezumăm cunoștințele

- O *mulțime finită* este o mulțime care are un număr finit de elemente.
- O *mulțime infinită* este o mulțime care un număr infinit de elemente.
- *Mulțimea* $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,...\}$ *a numerelor naturale* și $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,5,6...\}$ *mulțimea numerelor naturale nenule* sunt mulțimi infinite
- mulțimea tuturor divizorilor numărului natural p se notează cu D_p.
- mulțimea tuturor multiplilor numărului natural p se notează cu M_p.

Aplicăm cunoștințele

4. Scrieți explicit mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x \in M_2, x \in M_7 \text{ și } x \leq 50\}$.

Ne verificăm

1. a) 3 are proprietate caracteristică tuturor elementelor mulțimii A, adică „3 este număr natural și $3 < 8$”, deci $3 \in A$. La fel, 8 este număr natural și $8 \not< 8 \Rightarrow 8 \notin B$. b) Elementele mulțimii A sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. c) Mulțimea A are opt elemente. d) 8 număr natural și $8 \geq 8 \Rightarrow 8 \in B$; 3 este număr natural și $3 \not\geq 8 \Rightarrow 3 \notin B$. e) Este evident, nu pot fi scrise toate elementele lui B. f) Deoarece nu putem scrie toate elementele lui B nu le putem număra, deci nu putem stabili câte elemente are mulțimea B.

2. a) Divizorii lui 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 12; b) Multiplii lui 3 sunt: $3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, 3 \cdot 6, 3 \cdot 7, \ldots$. Prin urmare multipli lui 3 mai mici decât 17 sunt: 0, 3, 6, 9, 12, 15.

3. a) $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; b) $M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...\}$; c) Mulțimea D_{12} este finită (are 6 elemente) și M_3 este infinită. c) $M_p = \{0, p, 2p, 3p, 4p, 5p, ...\}$.

4. Orice element x din mulțimea A are următoarele proprietăți: $x \in \mathbb{N}^*$, $x \in M_2$, $x \in M_7$ și $x \leq 50$.

Pe de altă parte: (1) $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \neq 0$; (2) $x \in M_2 \Rightarrow x \in \{0, 4, 6, 8, ...\}$; (3) $x \in M_7 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, ...\}$. Dar din (1), (2), (3) și $x \leq 50$ rezultă $x \in \{14, 28, 42\}$. Deci $A = \{14, 28, 42\}$.

Activități de învățare

1. Mulțimea D_n reprezintă mulțimea tuturor divizorilor numărului n. Scrieți, enumerând elementele, mulțimile: $D_2, D_3, D_{14}, D_{30}, D_{47}$.

2. Copiați și înlocuiți căsuța alăturată enunțului cu (A), dacă enunțul este adevărat, sau cu (F), dacă enunțul este fals.

a) $D_4 \subset D_{20}$; ☐ b) $D_3 \subset D_{13}$; ☐

c) $D_9 \subset D_6$; ☐ e) $D_{10} \subset \mathbb{N}$; ☐